Lógica Matemática

12 *Exemplos de aplicação do teorema da dedução* ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Relembrando... Teorema da dedução

Se $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} B$, então $\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow B)$, em que A e B são fbf's de $\mathcal{L}$ e Γ é um conjunto de fbf' de $\mathcal{L}$ (possivelmente vazio).

Neste vídeo mostrarei alguns exemplos de utilização do teorema da dedução, alguns deles inclusive nos proporcionam novas regras de dedução.

Exemplo 1: Silogismo Hipotético (SH)

Para quaisquer fórmulas A, B e C de $\mathcal{L}$, vale o seguinte:

$$\Gamma = \{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\} \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow C).$$

Demonstração:

Vamos utilizar como hipótese adicional a fórmula A e deduzir C:

1	$(A \rightarrow B)$	Hipótese
2	$(B \rightarrow C)$	Hipótese
3	A	Hipótese
4	B	1,3 MP
5	C	2,4 MP

Logo, podemos afirmar que
$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathcal{L}} C$

e, pelo teorema da dedução:
$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}} (A \rightarrow C)$. ■

Exemplo 2 – Utilizando SH

Para quaisquer fórmulas A, B de $\mathcal{L}$, vale o seguinte:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \left(\neg B \to (B \to A)\right).$$

Demonstração:

1	$\left(\neg B \to (\neg A \to \neg B)\right)$	L1
2	$\left((\neg A) \to (\neg B)\right) \to (B \to A)$	L3
3	$\left(\neg B \to (B \to A)\right)$	1, 2 SH

Exemplo 2 – Outra prova, sem utilizar SH

Para quaisquer fórmulas A, B de $\mathcal{L}$, vale o seguinte:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \big(\neg B \to (B \to A)\big).$$

Demonstração:

1	$\big(\neg B \to (\neg A \to \neg B)\big)$	L1
2	$\big((\neg A) \to (\neg B)\big) \to (B \to A)$	L3
3	$(\neg B)$	Hipótese
4	$\big((\neg A) \to (\neg B)\big)$	1,3 MP
5	$(B \to A)$	2,4 MP

Obtemos $\neg B \vdash_{\mathcal{L}} (B \to A)$.
Pelo teorema da dedução:
$\vdash_{\mathcal{L}} \big(\neg B \to (B \to A)\big)$. ■

Exemplo 3

Para quaisquer fórmulas A, B de $\mathcal{L}$, vale o seguinte:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \big((\neg A \to A) \to A\big).$$

Ideia da Demonstração

- assuma como hipótese a fórmula $(\neg A \to A)$ e deriva A,
- ou seja, temos que $(\neg A \to A) \vdash_{\mathcal{L}} A$.
- Então, pelo teorema da dedução, $\vdash_{\mathcal{L}} \big((\neg A \to A) \to A\big)$.

Lógica Matemática

12 Exemplos de aplicação do Teorema da Dedução ∎

numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br